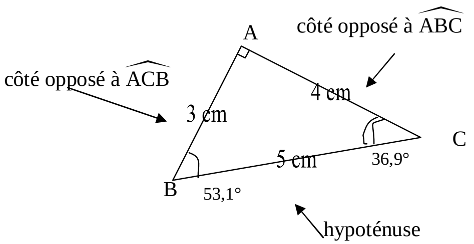
Aide mémoire Géométrie $3^{ème}$

Sinus d'un angle aigu:

Sinus: ABC est un triangle rectangle en A.

le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$, noté sin $\widehat{ABC}$, est le rapport $\dfrac{AC}{BC}$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\textit{longueur du côté opposé de l'angle}}{\textit{longueur de 'hypoténuse}}$$



$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$

$\sin 53{,}1° = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$

$\sin 36{,}9° = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

Remarque: Le sinus et le cosinus de n'importe quel angle aigu sont compris entre 0 et 1

Tangente d'un angle aigu:

Tangente: ABC est un triangle rectangle en A.

le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$, noté sin $\widehat{ABC}$, est le rapport $\dfrac{AC}{BC}$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\textit{longueur du côté opposé}}{\textit{longueur du côté adjacent}}$$

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB} = \tan 53{,}1° = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$ et $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC} = \tan 36{,}9° = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Remarque: La tangente d'un angle aigu est un nombre positif.

Formules de trigonométrie:

Propriété: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Démonstrations et exemples:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{BC^2}$$

D'après la propriété de Pythagore: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

on a donc $\dfrac{AB^2 + BC^2}{BC^2} = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$ Donc **$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 = 1$**

Soit l'angle $\widehat{ABC}$: $(\cos 53{,}1°)^2 + (\sin 53{,}1°)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{3^2}{5^2} + \dfrac{4^2}{5^2} = \dfrac{3^2 + 4^2}{5^2}$

or $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ $\dfrac{3^2 + 4^2}{5^2} = \dfrac{5^2}{5^2} = 1$

On peut aussi écrire que: $(\cos 53{,}1°)^2 + (\sin 53{,}1°)^2 = (0{,}6)^2 + (0{,}8)^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\;\frac{AC}{BC}\;}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan x$$

$$\frac{\sin 53{,}1°}{\cos 53{,}1°} = \frac{\;\frac{4}{5}\;}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = \tan 53{,}1°$$

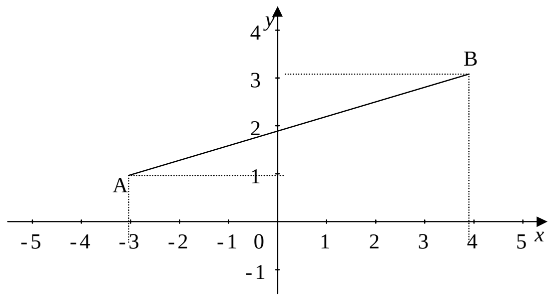
On peut écrire que: $\dfrac{\sin 53{,}1°}{\cos 53{,}1°} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333 = \tan 53{,}1°$

Distance de deux points dans un repère orthonormé:

Un repère est orthonormé lorsque l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont perpendiculaires $\perp$ et gradués avec la même unité de longueur.

Propriété: Dans un repère orthonormé, les points A et B ont pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$. Alors:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad \text{et donc } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



A (-3 ; 1) et B (4 ; 3)

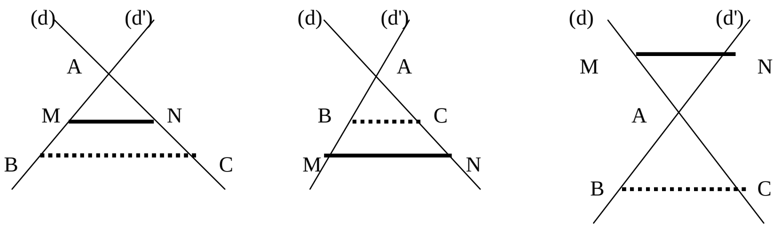
$AB^2 = (4 - (-3))^2 + (3 - 1)^2$

$AB^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53$

$AB = \sqrt{53} \approx 7,28$

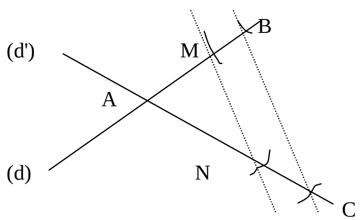
Propriété de Thalès:

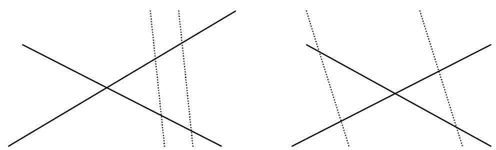
(d) et (d') sont deux droites sécantes en A
B et M sont deux points de (d), distincts de A
C et N sont deux points de (d'), distincts de A
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles // , alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Réciproque de la propriété de Thalès:

(d) et (d') sont deux droites sécantes en A
B et M sont deux points de (d), distincts de A
C et N sont deux points de (d'), distincts de A
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles // .





A, M, B et A, N C sont alignés dans le même ordre

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$ alors (BC) // (MN)

Vecteurs:

Direction et sens:

Lorsque deux droites sont parallèles // , on dit qu'elles ont même direction.
Une direction étant donné par une droite (AB), il y a deux sens possibles: de A vers B ou de B vers A.

Translation et égalité vectorielle:

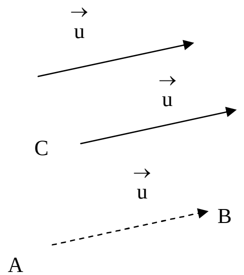
Soit la translation qui transforme les points A, C, E, ...en B, D, F,....

A cette translation est associée le vecteur $\vec{u}$:
- de direction: celle indiquée par la droite (AB)
- de sens: celui de A vers B
- de longueur: la longueur AB

Ce vecteur peut aussi être noté $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, ...

La translation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.



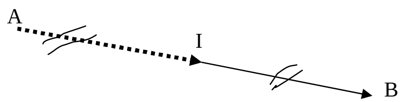
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Des vecteurs sont égaux signifient qu'ils ont:

- même direction
- même sens
- même longueur

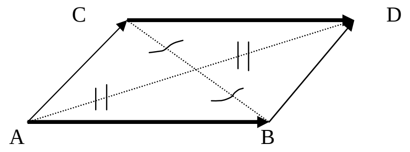
Milieu d'un segment:

Propriété: ► Si I est le milieu du segment [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
► Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu du segment [AB]

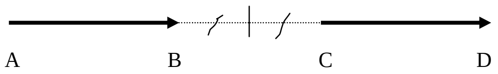


Vecteurs et parallélogrammes:

Propriétés: ► Si [AD] et [BC] ont le même milieu, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

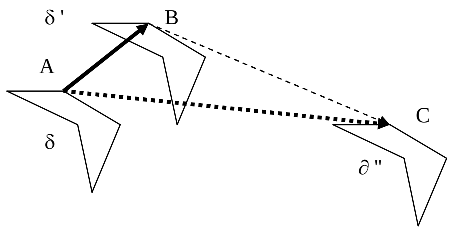


► Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors [AD] et [BC] ont le même milieu et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.



Somme de deux vecteurs:

Propriété: Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, la figure ∂ se transforme en δ'
par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la figure δ' se transforme en δ''
alors, la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ transforme δ en δ''



Relation de Chasles: A, B et C sont trois points quelconques.
On dit que la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Vecteurs particuliers:

Vecteur nul: $\vec{0}$

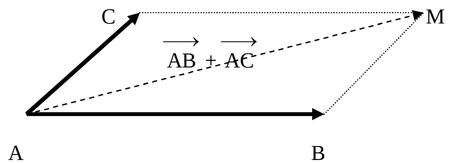
$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots\ \vec{0}$

D'après la relation de Chasles: $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$

Vecteurs opposés: $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

D'après la relation de Chasles: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Règle du parallélogramme: ABMC est un parallélogramme
alors, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$

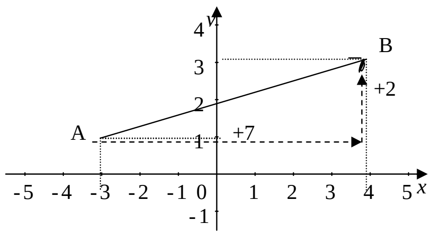


ABMC parallélogramme
donc: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$

donc: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$
(d'après la relation de Chasles).

Coordonnées d'un vecteur:

A et B sont les points de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$.
alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$



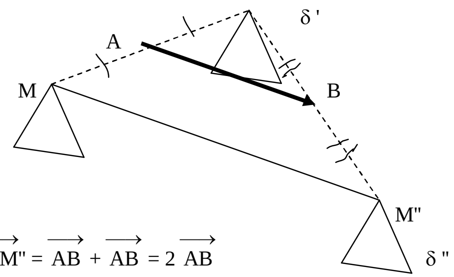
A (-3 ; 1) B (4 ; 3)
$\overrightarrow{AB}$ $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$
$\overrightarrow{AB}$ $(4 - (-3) ; 3 - 1)$
$\overrightarrow{AB}$ $(7 ; 2)$

Remarques:

↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑
(+ ; +)	(+ ; 0)	(+ ; -)	(0 ; -)	(- ; -)	(- ; 0)	(- ; +)	(0 ; +)

Composition de deux symétries centrales:

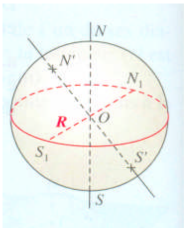
La figure δ a pour symétrique δ' par rapport à A.
La figure δ' a pour symétrique δ'' par rapport à B.
Alors la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$) transforme directement ∂ en δ''



$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AB}$

Sphère:

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM = R.
La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM $\leqslant$

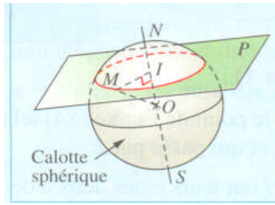


[NS] est un diamètre de la sphère et NS = 2R

Section d'une sphère par un plan:

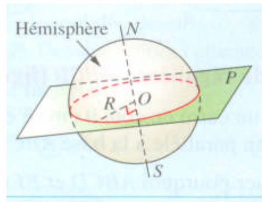
Propriété: La section d'une sphère par un plan est un cercle.

Soit une sphère de centre O et de rayon R
Soit P un plan perpendiculaire en I à un diamètre [NS]
Soit OI le distance du centre O au plan P.



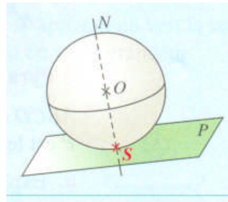
0 < OI < R

Le cercle de section a pour centre I
Pour tout point M de ce cercle, le triangle OIM est rectangle en I



OI = 0

Le cercle de section a même centre O et même rayon R que la sphère: on dit que c'est un grand cercle de la sphère.



OI = R

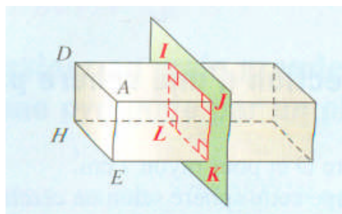
Le cercle de section a pour centre S (ou N) et pour rayon O. On dit que le plan P est tangent à la sphère en S (ou N)

Remarque: Si OI > R, le plan P ne coupe pas la sphère.

Sections d'un pavé droit par un plan:

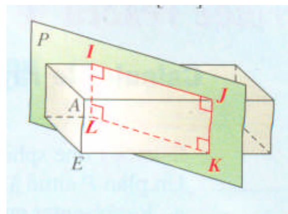
Propriétés:

La section d'un pavé droit par un plan P parallèle // à une face est un rectangle.



P est // à la face ADEH

La section d'un pavé droit par un plan P parallèle // à une arête est un rectangle

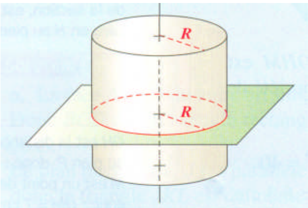


P est // à l'arête [AE]

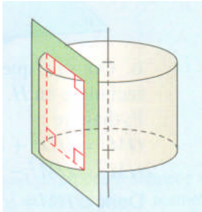
Sections d'un cylindre de révolution par un plan:

Propriétés:

La section d'un cylindre de rayon R par un plan perpendiculaire $\perp$ à l'axe est un cercle de rayon R et dont le centre $\in$ à cet axe.

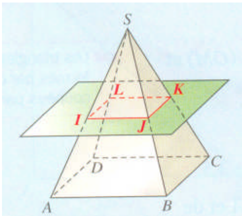


La section d'un cylindre par un plan parallèle // à l'axe est un rectangle.



Sections d'une pyramide par un plan:

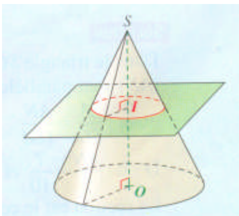
Propriété: La section d'une pyramide par un plan parallèle // à la base est un polygone de même forme que la base: ses côtés sont parallèles // à ceux de la base.



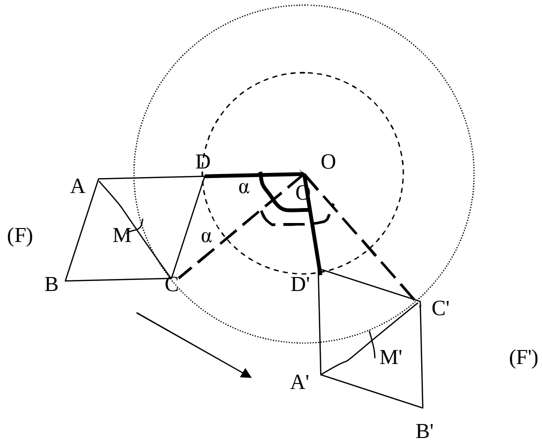
ABCD est un carré. Alors, IJKL est un carré et (IJ) // (AB), (JK) // (BC), etc...

Sections d'un cône de révolution par un plan:

Propriété: La section d'un cône de révolution par un plan parallèle // à la base est un cercle dont le centre $\in$ à la hauteur du cône.



Rotation:

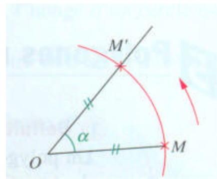


En tournant autour de O d'un angle de mesure α, la figure (F) vient se superposer à (F')

Image d'un point par une rotation:

Par la rotation de centre O et d'angle α , dans le sens de la flèche:

- l'image d'un point M (distinct de O) est le point M' tel que OM = OM' et $\widehat{MOM'}$ = α (en tournant dans le sens de la flèche).
- l'image de O est le point O

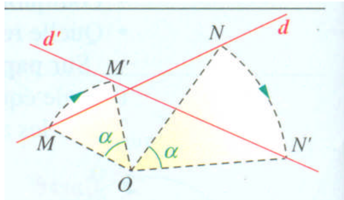


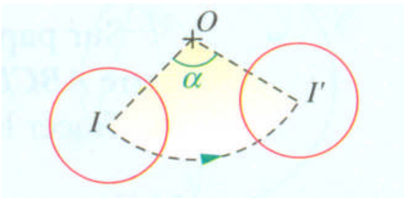
Une rotation conserve les longueurs, l'alignement, les angles et les aires.
(voir 1ère figure): A, B, C, D, M ont pour image A', B', C', D' et M'
AB = A'B'
A, M, C alignés donc A', M', C' alignés
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
Les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' ont même aire.

Image de figures par une rotation:

Par une rotation:

- une droite (d) a pour image une droite (d')
- un segment a pour image un segment de même longueur
- une demi-droite a pour image une demi-droite
- un cercle de centre I a pour image le cercle de même rayon dont le centre I' est l'image de I





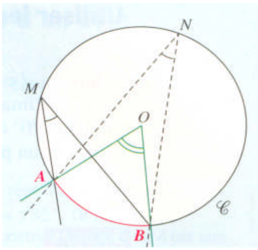
Angles inscrits dans un cercle:

(C) est un cercle de centre O:

- On dit qu'un angle $\widehat{AMB}$ est inscrit dans (C) lorsque son sommet M $\in$ à (C)et lorsque [MA] et [MB] sont des cordes de (C).
- $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$; On dit qu'ils interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Propriété: La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$$



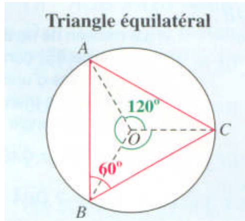
Polygones réguliers:

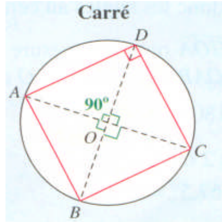
Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure

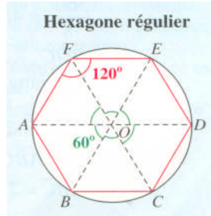
Propriétés: Il existe un cercle passant par tous les sommets d'un polygone régulier. On l'appelle le cercle circonscrit au polygone régulier. le centre O de ce cercle est appelé le centre du polygone régulier.

A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier de centre O.

La rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOB}$ dans un sens quelconque transforme le polygone régulier en lui-même.







$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120°$

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = 90°$

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = 60°$