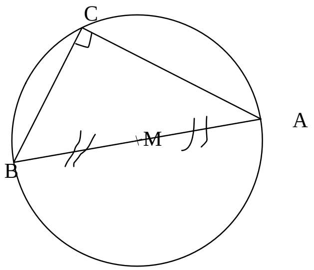
Aide mémoire Géométrie 4$^{\text{ème}}$

Triangle rectangle et cercle circonscrit:

Propriété: Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit et le milieu de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.



Propriété: Si un triangle est inscrit dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle, alors le triangle est rectangle et ce diamètre est son hypoténuse.

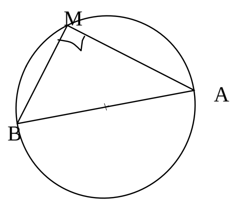
Cercle et angle droit:

Propriété:

Si un angle $\widehat{AMB}$ est droit,

alors le point M $\in$ au cercle

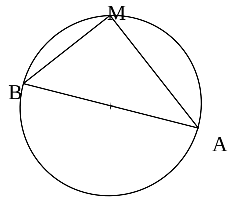
de diamètre [AB].



Propriété:

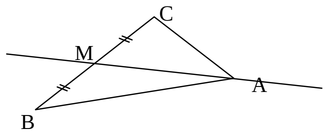
Si un point M $\in$ à un cercle de diamètre [AB],

alors l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.



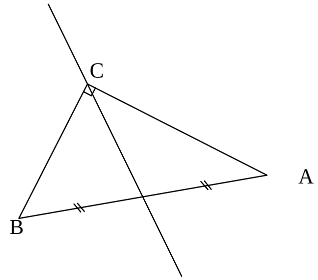
Triangle rectangle et médiane:

Dans un triangle, la longueur d'une médiane est égale à la longueur du segment joignant le sommet et le milieu du côté opposé relatifs à cette médiane.

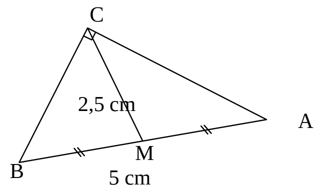


AM longueur de la médiane relative au côté [BC]

Propriété: Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



Propriété: Si un côté d'un triangle mesure le double de la longueur de la médiane relative à ce côté, alors le triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.



AB = 5 cm = 2 CM = 2 × 2,5 cm

Le triangle ACB rectangle en C

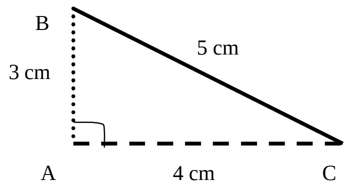
[AB] est l'hypoténuse

Théorème de Pythagore:

Théorème de Pythagore:

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

► Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$



$BC^2 = BA^2 + AC^2$

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

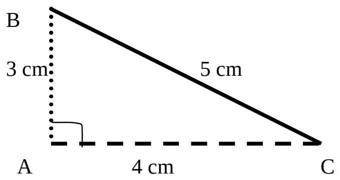
$BC^2 = BA^2 + AC^2$

Réciproque du Théorème de Pythagore:

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.
Le plus grand côté est son hypoténuse.

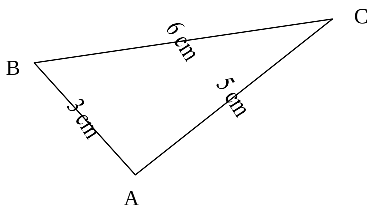
► Si, dans un triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

[BC] est le plus grand côté.
$BC^2 = 5^2 = 25$
$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Réciproque du Théorème de Pythagore
Le triangle ABC est rectangle en A
[BC] est l'hypoténuse.



Propriété: Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

► Si, dans un triangle ABC, on a $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle.



$BC^2 = 6^2 = 36$

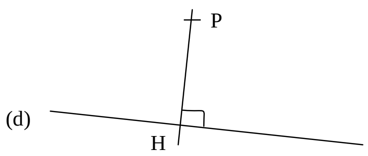
$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

$36 \neq 34$ donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

ABC n'est pas rectangle

Distance d'un point à une droite:

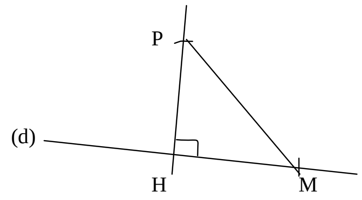
Soit une droite (d) et un point P qui $\notin$ à (d). Le point le plus roche de P est le point H tel que (PH) $\perp$ (d).
La distance du point P à une droite (d) est la longueur du segment [HP].



HP est la distance du point P à la droite (d).

Propriété: Si M est un point de la droite (d), alors PH $<$ PM

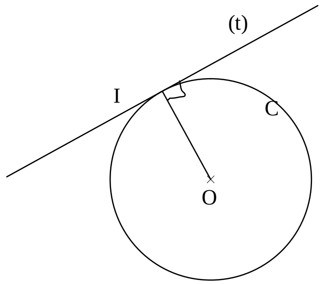
Propriété: Le segment [PH] est l'unique segment qui joint le point P à un point de la droite (d) et qui a la plus petite longueur.



Droite tangente à un cercle:

Soit un cercle (C) de centre O et I un point du cercle.
La tangente en I au cercle (C) est la droite passant par le point I et perpendiculaire $\perp$ au rayon [OI]

Propriété: Le point I est le seul point commun au cercle et à la tangente (t) en I au cercle.



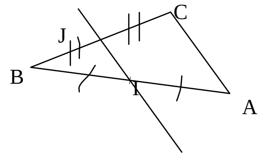
(t) est la tangente en I au cercle (C)

(t) $\perp$ [OI]

Triangle et droites des milieux:

Propriété: Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle // au troisième côté.

Propriété: Dans un triangle, si un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de la longueur du troisième côté.

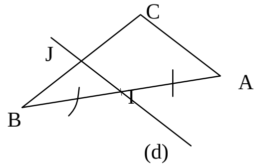


I milieu de (AB) et J milieu de (BC)
(IJ) // (AC)

AC = 2 cm
alors $IJ = \frac{1}{2} AC = 1$ cm

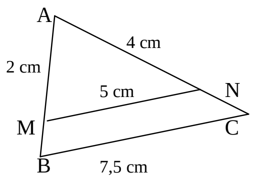
Propriété: Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle // à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

I milieu de (AB)
(IJ) // (AC)
alors J milieu de (BC)



Propriété de Thalès dans un triangle:

Dans un triangle ABC, le point M $\in$ [AB] et le point N $\in$ [AC].
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles // , alors on a les égalités: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



M $\in$ [AB] et N $\in$ [AC]
(MN) // (BC)

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\frac{MN}{BC} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$

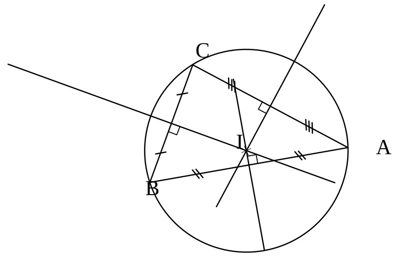
donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Astuce pour ne pas se tromper:

$$\frac{AM}{AB} \qquad = \qquad \frac{AN}{AC} \qquad = \qquad \frac{MN}{BC}$$

Médiatrices:

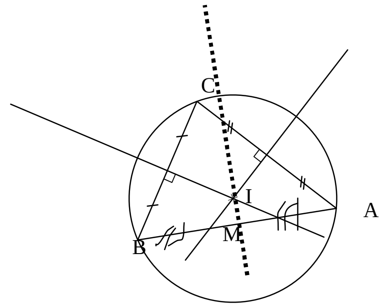
Propriété: Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes. Le point de concours des médiatrices des côtés d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Propriété: Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et par le centre du cercle circonscrit, alors cette droite est la médiatrice de ce côté et elle lui est perpendiculaire $\perp$.

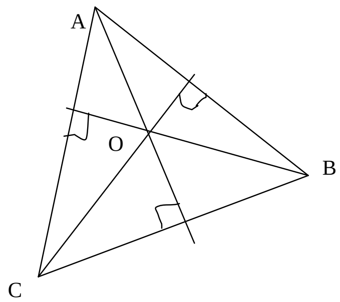
(IM) passe par le point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC et par le milieu M du côté [AB].
La droite (IM) est la médiatrice du côté [AB].



Hauteurs:

Propriété: Les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le point de concours des hauteurs d'un triangle est l'orthocentre du triangle.

Propriété: Dans un triangle, si une droite passe par un sommet et par l'orthocentre, alors cette droite est une hauteur et elle est perpendiculaire $\perp$ au côté opposé à ce sommet.



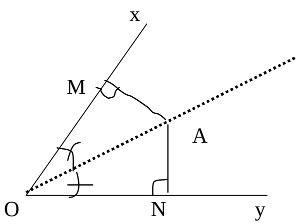
O est l'orthocentre du triangle ABC

Bissectrices

Équidistance:

Propriété:

Si un point $\in$ à la bissectrice d'un angle, alors, il est équidistant des côtés de l'angle.

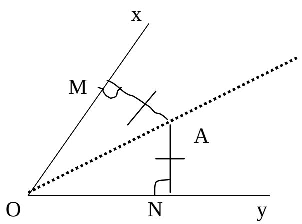


A $\in$ à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$

AM = AN

Propriété:

Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il $\in$ à la bissectrice de l'angle.



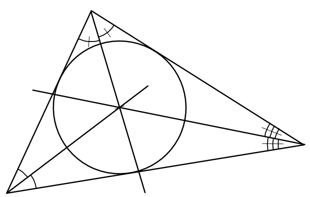
Le point A est équidistant des côtés de l'angle $\widehat{xOy}$. AM = AN

B $\in$ à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Cercle inscrit dans un triangle:

Propriété: Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours des bissectrices des angles d'un triangle est le cercle inscrit au triangle.

Propriété: Dans un triangle, si une droite passe par un sommet et par le centre du cercle inscrit, alors cette droite est la bissectrice de l'angle de ce sommet.

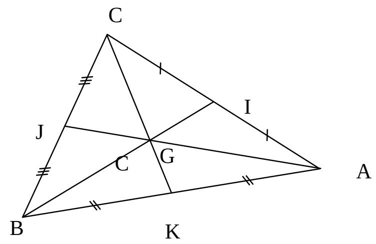


Médianes:

Propriété: Les médianes d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours des médianes d'un triangle est le centre de gravité du triangle.

Propriété: Si une droite passe par un sommet et par le centre de gravité d'un triangle, alors cette droite est une médiane et elle passe par le milieu du côté opposé au sommet.

Propriété: Le centre de gravité d'un triangle est situé, sur chaque médiane, au $\frac{1}{3}$ en partant du milieu du côté et aux $\frac{2}{3}$ en partant du sommet.



(AJ), (BI) et (AJ) sont les médianes.

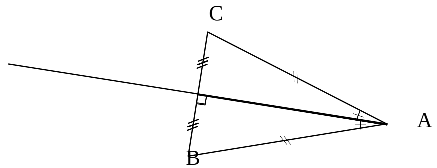
G est le centre de gravité.

$CG = \frac{2}{3} CK$ $BG = \frac{2}{3} BI$ et $AG = \frac{2}{3} AJ$

Triangles particuliers:

Triangle isocèle:

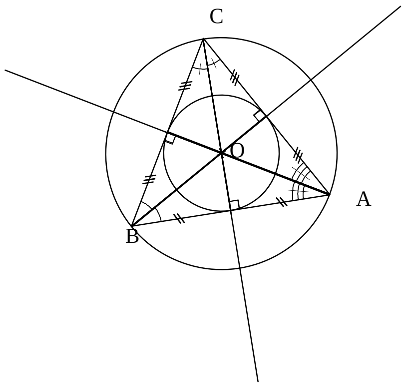
Propriété: Si un triangle est isocèle, alors la bissectrice, la hauteur, la médiane issues du sommet principal et la médiatrice à la base sont confondues.



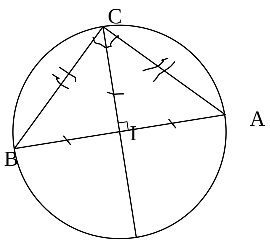
Triangle équilatéral:

Propriété: Si un triangle est équilatéral, alors la bissectrice, la hauteur, la médiane issues d'un sommet et la médiatrice du côté opposé à ce sommet sont confondues.

Propriété: Si un triangle est équilatéral, alors le centre du cercle inscrit, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont confondus.



Triangle isocèle et rectangle:



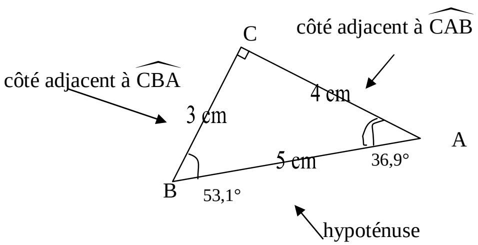
Propriété: Si un triangle est isocèle et rectangle, alors:

- la bissectrice, la hauteur, la médiane issues du sommet de l'angle droit et la médiatrice de l'hypoténuse sont confondues
- l'orthocentre est le sommet principal du triangle
- le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse
- la médiane issue du sommet de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.

Cosinus d'un angle aigu:

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle par la longueur de l'hypoténuse. (On note cos).

$$\text{Cosinus d'un angle aigu} = \frac{\textit{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\textit{longueur de l'hypoténuse}}$$



$\cos \widehat{CBA} = \frac{BC}{BA}$

$\cos 53{,}1° = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB}$

$\cos 36{,}9° = \frac{4}{5} = 0{,}8$

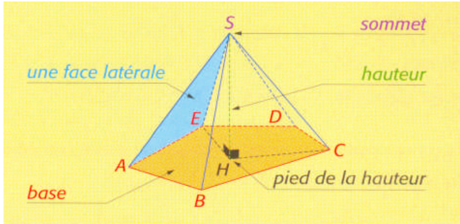
Pyramide:

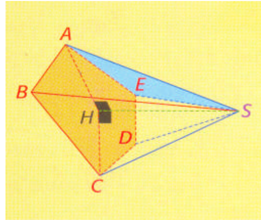
Une pyramide est un solide tel que:

- les faces latérales sont des triangles ayant un sommet en commun qui est le sommet de la pyramide.
- la base est un polygone et c'est la seule face ne contenant pas le sommet de la pyramide.

La hauteur d'une pyramide, c'est:

- la droite passant par le sommet de la pyramide et perpendiculaire $\perp$ à la base.
- la longueur du segment joignant le sommet de la pyramide au pied de la hauteur.





La pyramide se nomme: ABCDE - Le sommet est le point S - La hauteur est [SH] ou SH.

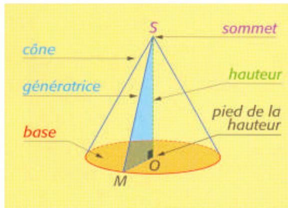
Cône de révolution:

Un cône de révolution est le solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. Il est constitué:

- d'un disque appelé base du cône,
- d'une surface conique engendrée par une génératrice qui est l'hypoténuse du triangle rectangle.

La hauteur d'un cône de révolution, c'est:

- la droite passant par le centre de la base et par le sommet du cône,
- la longueur du segment joignant le centre de la base et le sommet du cône.



Le point S est le sommet du cône - La base est le disque de centre O et de rayon [OM]
La hauteur est la droite (SO) ou [SO] - Le point O est le pied de la hauteur.
Le segment [SM] est une génératrice du cône.