Aide mémoire Numération 3ème

Développement:

Développer un produit, c'est l'écrire sous forme d'une somme (ou d'une différence):

$k(a+b) = ka + kb$	$k(a-b) = ka - kb$	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
$5(x+2) = 5x + 10$	$5(x-2) = 5x - 10$	$(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15$
		$= x^2 + 8x + 15$

Identités remarquables:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$	$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$	$(x+3)(x-3) = x^2 - 9$

Factorisation:

Factoriser une somme (ou une différence), c'est l'écrire sous forme d'un produit.

$ka + kb = k(a+b)$ $\quad (x+2)(3x-1) + 3(x+2) = (x+2)(3x-1+3) = (x+2)(3x+2)$

$ka - kb = k(a-b)$ $\quad (x+2)(3x-1) - 3(x+2) = (x+2)(3x-1-3) = (x+2)(3x-4)$

Identités remarquables:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x+3)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\quad x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + (-3)^2 = (x-3)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\quad x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$

Équation du premier degré à une inconnue:

Résoudre une équation du premier degré à une inconnue c'est résoudre l'équation sous la forme $ax = b$

$3x + 2 = x - 1$ $\quad 3x - x + 2 - 2 = x - x - 1 - 2$ $\quad 2x = -3$ $\quad x = -\dfrac{3}{2}$

Equation de la forme (ax + b) (cx + d) = 0

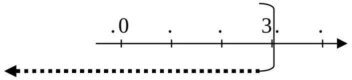
L'un au moins des facteurs du produit est nul. les solutions sont tels que $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$

$(3x+5)(x-8) = 0$ $\quad 3x + 5 = 0$ donc $x = -\dfrac{5}{3}$ $\quad$ et $\quad x - 8 = 0$ donc $x = 8$

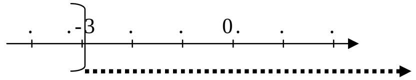
Inéquation du premier degré à une inconnue:

C'est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu.
Résoudre l'inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'inégalité soit vraie.

$2x \leq 6$ alors $x \leq 3$



$-x + 1 < 4$ alors $-x < 3$ alors $x > -3$



Racine carrée d'un nombre positif:

a nombre positif, la racine carrée de a est le nombre ≥ 0 dont le carré est a. On note $\sqrt{a}$

$a \geq 0 \quad (\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$ et $4 \geq 0$ $\qquad \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ car $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ et $\dfrac{3}{2} \geq 0$

Équations de la forme $x^2 = a$

$a \geq 0$ $\quad$ Si $a > 0$ $\quad x^2 = a$ l'équation a deux solutions: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

$x^2 = 5$ l'équation a deux solutions: $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$

Si $a = 0$ $\quad x^2 = 0$ l'équation a une seule solution: 0

Attention: le carré d'un nombre est toujours positif: $x^2 = -16$ est impossible.

Opérations

Multiplication:

$a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$ $\qquad \sqrt{9} \times \sqrt{4} = \sqrt{9\,x\,4} = \sqrt{36}$ car $3 \times 2 = 6$

Division:

$a \geq 0$ et $b > 0$ alors $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

Système de deux équations à deux inconnues:

Il est de la forme: $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ où x et y sont les deux inconnues

Résoudre un système: on se ramène à la résolution d'équations à une inconnue.

Exemple: $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ y = 2 – 3x 2x – 3 (2 – 3x) = 5

2x – 6 + 9x = 5

11x = 11 x = 1

y = 2 – 3×1 = 2 – 3 = – 1

x = 1 et y = – 1

Diviseurs communs à deux entiers:

Un diviseur commun à a et b est un nombre entier qui divise a et qui divise b.

2 est un diviseur commun à 8 et 12 car 8 : 2 = 4 et 12 : 2 = 6

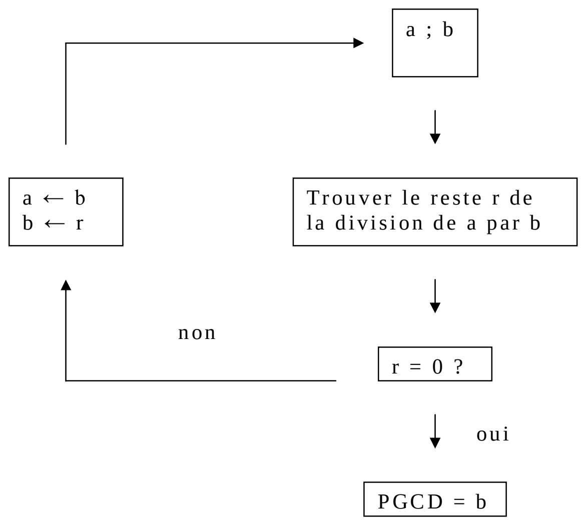
Remarque: 1 est toujours diviseur commun à a et b.

PGCD Plus Grand Commun Diviseur. On peut le noter PGCD (a ; b)

diviseurs de 8: 1, 2, 4 et 8 diviseurs de 12: 1, 2, 3, 4, 6 et 12
diviseurs communs à 8 et 12: 1, 2 et 4 PGCD (8 ; 12) = 4

Si PGCD (a ; b) = 1, alors a et b sont premiers entre eux.
2 et 3 sont premiers entre eux car PGCD (2 ; 3) = 1
8 et 12 ne sont pas premiers entre eux car PGCD (8 ; 12) = 4 ≠ 1

Algorithme d'Euclide et recherche du PGCD:
r est le reste de la division euclidienne de a par b (avec b < a), alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)



exemple: PGCD (1078 ; 322) ?

a	b	restes	étapes
1078	322	112	1078 = 3 × 322 + 112
322	112	98	322 = 2 × 112 + 98
112	98	14	112 = 1 × 98 + 14
98	14	0	98 = 7 × 14 + 0

PGCD (1078 ; 322) = PGCD (322 ; 112) = PGCD (112 ; 98) = PGCD (98 ; 14) = **14**

Fractions irréductibles:

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

$\frac{3}{4}$ est irréductible car PGCD (3 ; 4) = 1

Simplifier: $\frac{60}{45} = \frac{\cancel{5 x 3}\, x\, 4}{\cancel{5 x 3}\, x\, 3} = \frac{4}{3}$ PGCD (4 ; 3) = 1 donc $\frac{4}{3}$ est irréductible.

Fonctions linéaires:

Proportionnalité et relation y = a x

Si les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x, alors il existe un nombre "fixe" a tel que y = ax
S'il existe un nombre "fixe" a tel que y = ax, alors les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x.

y = 4x 4 est un nombre "fixe"

x	0,4	3	10,5	20
y	1,6	12	42	80

× 4

Fonctions linéaires

Fonction linéaire de coefficient a:

a nombre "fixe", la fonction linéaire de coefficient a, c'est associer à chaque nombre x son produit ax. On dit que a x est l'image de x.

Fonction linéaire de coefficient a

$$\text{nombre} \xrightarrow{\times a} \text{image}$$

$$x \qquad\qquad ax$$

on note f (x) = ax

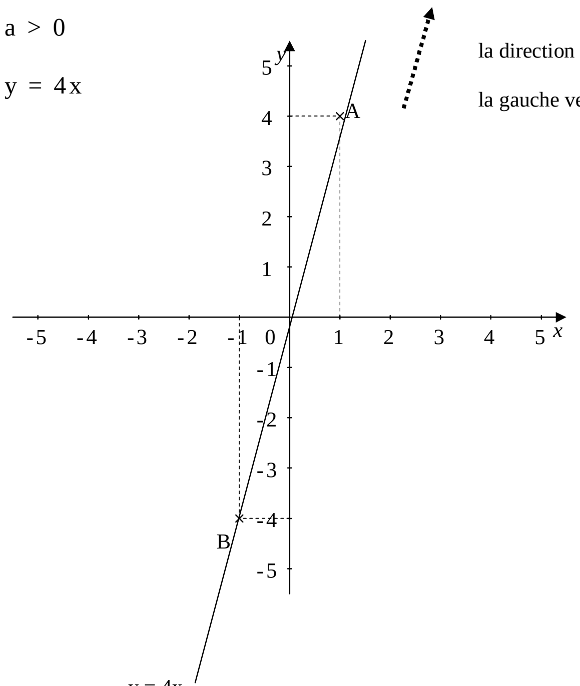
Représentation graphique d'une fonction linéaire:

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est la droite qui passe par l'origine O du repère, et par le point A de coordonnées (1 ; a).

On dit que y = ax est une équation de la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient a. a est appelé le coefficient directeur de cette droite.

a > 0

y = 4x

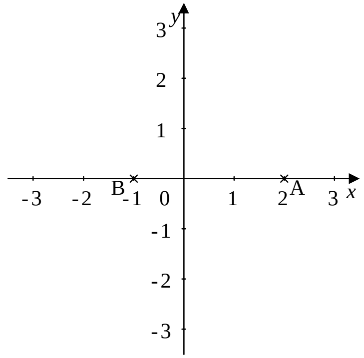


la direction "monte" de

la gauche vers la droite

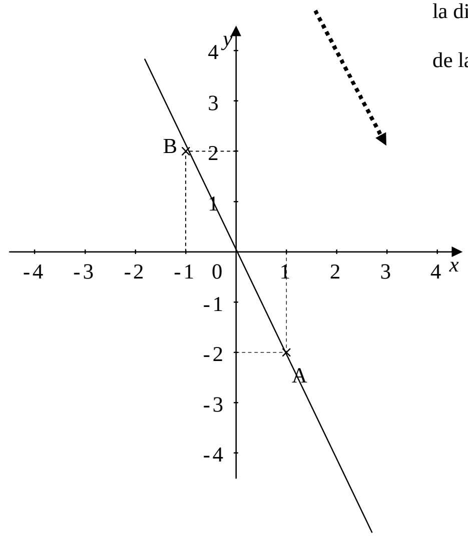
y = 4x

a = 0
y = 0 x



la droite est l'axe des abscisses

a < 0
y = -2x



la direction "descend"

de la droite vers la gauche

Fonctions affines

a et b nombres "fixes". Une fonction affine associe à chaque nombre x le nombre ax + b
On dit que ax + b est l'image de x.

On dit que $x \to ax$ est la fonction linéaire associée à la fonction affine $x \to ax + b$

Fonction affine ax + b

$$x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+ b} ax + b$$

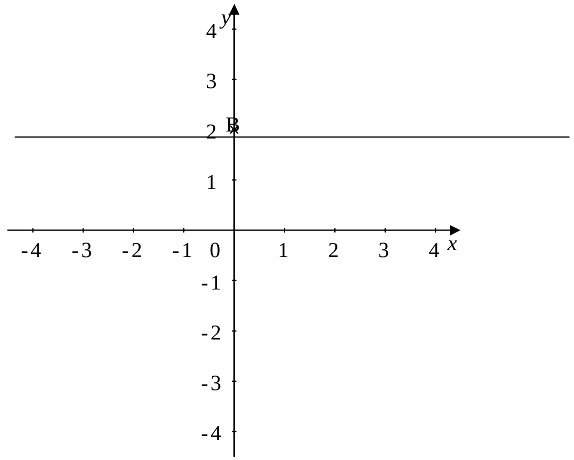
nombre x   image ax + b

on note f(x) = ax + b

Représentation graphique d'une fonction affine ax + b:

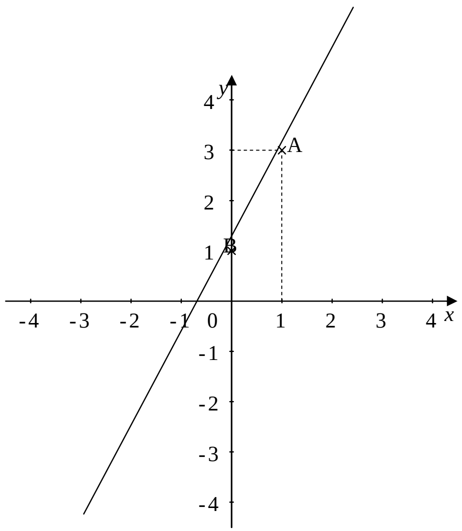
La droite d passe par B (0 ; b) et elle est parallèle à d' de la fonction affine ax

On dit que y = ax + b est une équation de la droite d.
a est le coefficient directeur de la droite d
b est l'ordonnée à l'origine de la droite d.

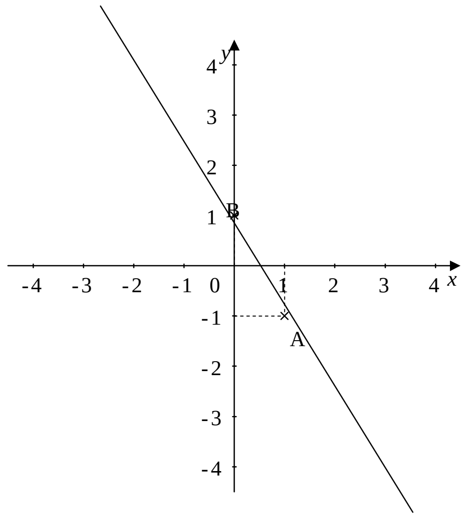


a = 0
y = 2

y = 2



a > 0 avec a = 2
y = 2x + 1



a < 0 avec a = -2
y = -2x + 1

Proportionnalité des accroissements:

Soit une fonction affine ax + b. Quand x varie (augmente ou diminue) d'un certain nombre h, alors son image ax + b varie de ah.

y = 2x + 3 Si x = 1, y = 5
h = 6 alors x = 7 (= 1 + **6**), y = 17 (= 5 + **12**) 10 = 2×6