Aide mémoire NUMERATION de la 6ème à la 3ème

---

chiffres et nombres

→ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont des chiffres.
→ On écrit des nombres à l'aide des chiffres (*5 698*).

les opérations

opération	*signe*	*résultat*	*action*
addition	+	somme	ajouter des termes
soustraction	–	différence	soustraire des termes
multiplication	×	produit	multiplier des facteurs
division	÷ **ou :**	quotient avec un reste (= ou ≠ de 0)	diviser un dividende par un diviseur

addition commutativité: $a + b = b + a$ $3 + 5 = 5 + 3 = 8$
$a + 0 = a$ $3 + 0 = 3$

soustraction $a – b = c \Leftrightarrow b + c = a$ $5 – 2 = 3 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5$

multiplication $0 \times a = 0$ et $a \times 0 = a$ $0 \times 5 = 0$ et $5 \times 0 = 0$
$1 \times a = a$ et $a \times 1 = a$ $1 \times 3 = 3$ et $3 \times 1 = 3$
communtativité $a \times b = b \times a$ $3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$
associativité $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $(3 \times 2) \times 5 = 6 \times 5 = 3 \times (2 \times 5) = 3 \times 10 = 30$

quotient:

Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$
Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
numérateur
On note a : b ou $\frac{a}{b}$ écriture fractionnaire $22 : 4 = \frac{22}{4} = 5{,}5$
dénominateur

Si $\frac{a}{b} = a : b$ = nombre entier,
alors a est un multiple de b a est divisible par b b est un diviseur de a

$\frac{24}{2} = 24 : 2$ 24 est un multiple de 2 24 est divisible par 2 2 est un diviseur de 24

divisibilité Un nombre est divisible par un autre quand le reste de la division est nulle.
$450 = 45 \times 10 + 0 \Rightarrow$ 450 est divisible par 10 et 10 est un diviseur de 450

par 2 Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 $468 = 234 \times 2 + 0$
par 5 Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 $625 = 105 \times 5 + 0$
par 3 Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3
4236: $4 + 2 + 3 + 6 = 15$ $15 = 5 \times 3 + 0$
par 9 Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9
6 408: $6 + 4 + 0 + 8 = 18$ $18 = 2 \times 9 + 0$
par 4 Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4 5 736: $36 = 9 \times 4 + 0$

enchaînement d'opérations:

Pour calculer une expression avec ( ), on effectue d'abord les calculs entre ( ) en commençant par les ( ) les plus intérieures. Les calculs entre ( ) sont prioritaires.
$A = (8 \times 3) : [(6 – 4) \times 3] = 24 : [2 \times 3] = 24 : 6 = 4$

Calculer une expression avec quotient revient à calculer une expression avec ( ).
$B = \frac{10+5}{5} = (10 + 5) : 5 = 15 : 5 = 3$

On calcule une expression sans ( ) avec additions et soustractions de la gauche vers la droite.
$C = \underrightarrow{15 – 7 – 6 + 5} = 8 – 6 + 5 = 2 + 5 = 7$

On calcule une expression sans ( ) avec multiplications et divisions de la gauche vers la droite.
$D = 15 : 3 \times 8 : 2 = 5 \times 8 : 2 = 40 : 2 = 20$

Por calculer une expression sans ( ), on effectue d'abord les multiplications et les divisions.
$E = 6 : 3 + 5 \times 2 – 1 = 2 + 10 – 1 = 12 – 1 = 11$

nombres décimaux:

→ L'écriture à virgule d'un nombre s'appelle son écriture décimale.
56,*98*
partie entière , partie décimale (nombre fini de chiffres non nul)

→ un nombre entier est un nombre décimal dont la partie décimale est nulle: *175 = 175,0000*

Pr ► On ne change pas un nombre décimal si on ajoute ou si on enlève:
» des 0 avant la partie entière: *00,58 = 0,58 050,56 = 50,56*
» des 0 après la partie décimale: *67,800 = 67,8 5,00 = 5*

→ Le rang des chiffres d'un nombre décimal est la position qu'il occupe par rapport à la virgule

Partie **entière**			,	Partie **décimale**			
Classe des millions	Classe des mille	Classe des unités	,	dixième	centième	millième	dix-millième
c d u	c d u	c d u	,				
2 0	3 2 7	8 6 0	,	4	0	2	
		5 6	,	9	8		

→ Écriture fractionnaire d'un nombre décimal:
Le dénominateur est une puissance de 10 (10, 100, 1 000, 10 000, ...) et le numérateur n'a pas de virgule.

$56{,}98 = \frac{5\,698}{100}$

Pr ► Un nombre décimal admet plusieurs écritures fractionnaires:

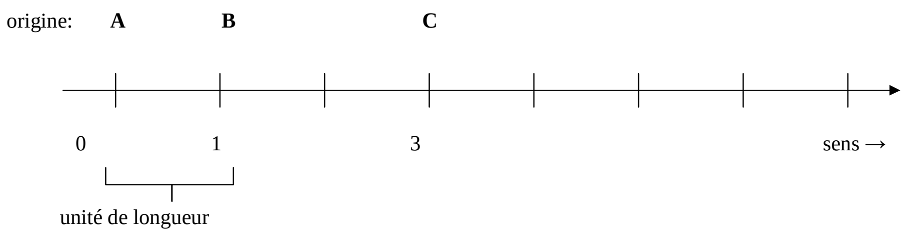
$56{,}98 = \frac{5\,698}{100} = \frac{56\,980}{1\,000} = \frac{569\,800}{10\,000} \ldots$

→ Décomposition:

$56{,}98 = (5 \times 10) + (6 \times 1) + (9 \times 0{,}1) + (8 \times 0{,}01)$

$= 50 + 6 + \frac{9}{10} + \frac{8}{100}$

demi-droite graduée



Pr ► Un point est repéré par un nombre appelé son abscisse. (C a pour abscisse 3)
A chaque nombre (abscisse) correspond un point.

comparaison de nombres

a < b	"a est inférieur à b"	8 < 12	♣ < ♣
a = b	"a est égal à b"	12 = 8	♣ = ♣
a > b	"a est supérieur à b"	12 > 8	♣ > ♣

» nombres décimaux:

172,385**9** > **172,38**3**7**

partie identique

5 > 3

rangement de nombres

ordre croissant = du plus petit au plus grand: 3 < 6 < 78 < 189
ordre décroissant = du plus grand au plus petit: 45,6 > 6,89 > 5

encadrement de nombres

Encadrer un nombre: écrire ce nombre entre deux valeurs, l'une inférieurs, l'autre supérieure.
23 < 28,56 < 54
Intercaler un nombre entre deux nombres a et b, c'est trouver un nombre entre a et b.entre 2,8 et 2,9 [on peut avoir 2,8 < 2,87 < 2,9]

valeur approchée

Valeur approchée: 26 < 26,343 < 27

26 < 26,343 < 27	c'est 26	par défaut	à l'unité près.
	c'est 27	par excès	à l'unité près.
26,3 < 26,343 < 26,4	c'est 26,3	par défaut	au dixième près.
	c'est 26,4	par excès	au dixième près.

troncature

On supprime tout ce qui se trouve après la virgule :
3,63 → 3,~~63~~ → 3

arrondi :
L'arrondi au dixième, c'est le nombre à un seul chiffre après la virgule le plus proche.
arrondi au dixième de 3,63 → 3,6~~3~~ → 3,6

multiplier par:

× 10	→	1 rangs vers la droite	0,54 × 10	=	5,4
× 100	→	2 rangs vers la droite	0,54 × 100	=	54
× 1000	→	3 rangs vers la droite	0,54 × 1000	=	540
× 0,1	→	1 rang vers la gauche	0,54 × 0,1	=	0,54
× 0,01	→	2 rangs vers la gauche	0,54 × 0,01	=	0,054
× 0,001	→	3 rangs vers la gauche	0,54 × 0,001	=	0,0054

division euclidienne $a = q \times b + r$ avec $r < b$

dividende = quotient entier × diviseur + reste avec reste < diviseur

420 = 17 × 24 + 12 avec 12 < 24

division Soit a un nombre décimal et b un nombre entier non nul.
On appelle quotient de a par b le nombre qui, multiplié par b, donne a.
Le quotient de a par b se note a : b et correspond au résultat de la division de a par b.
On a (a : b) × b = a

22,41 × 2 = 44,82 donc 44,82 : 2 = 22,41

et (44,82 : 2) × 2 = 22,41 × 2 = 44,82

ordre de grandeur

Pour prévoir un résultat ou vérifier le résultat d'une opération sans calculatrice

234,7 + 78,7 + 987,654 ≈ 230 + 80 + 1000 ≈ 1310

21,68 × 60,98 ≈ 20 × 60 ≈ 1200

fraction

Soit a et b deux nombres, avec b ≠ 0, le quotient a : b peut s'écrire $\frac{a}{b}$ écriture fractionnaire

$\frac{a}{b}$ si a et b sont entiers, on a une fraction. $\frac{22}{4}$ est une fraction. $\frac{3,5}{7}$ n'est pas une fraction.

Une fraction est un quotient de deux nombres entiers: $\frac{3}{8}$

a numérateur

$\frac{a}{b}$

b dénominateur

Pr ► Si k ≠ 0, alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{15}{10}$

Si k ≠ 0, alors $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$ $\frac{12}{8} = \frac{12 \div 4}{8 \div 4} = \frac{3}{2}$

Pr ► Simplifier une fraction, c'est donner une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

$$\frac{48}{56} = \frac{6 \times 8}{7 \times 8} = \frac{6}{7}$$

On peut toujours déterminer une fraction égale au quotient de deux nombres décimaux:

$$\frac{3,5}{6} = \frac{3,5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{7}{12}$$

Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par une fraction:

J'ai colorié les $\frac{3}{4}$ des 100 cartes de Noël: $\frac{3}{4} \times 100$ (= 75)

Pour multiplier la fraction $\frac{a}{b}$ par c, on peut:

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{c}$ $\frac{15}{5} \times 7 = 3 \times 7 = 21$ $\frac{\boldsymbol{a \times c}}{\boldsymbol{b}}$ $\frac{15 \times 7}{5} = \frac{105}{5} = 21$ $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{a}$ $\frac{15}{5} \times 7 = \frac{7}{5} \times 15 = 1,4 \times 15 = 21$

Pour diviser un nombre par 10, on le multiplie par 0,1 630 : 10 = 630 × 0,1 = 63
Pour diviser un nombre par 100, on le multiplie par 0,01 630 : 100 = 630 × 0,01 = 6,3

simplification

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$ $\frac{20}{35} = \frac{20 \div 5}{35 \div 5} = \frac{4}{7}$

fraction irréductible: on ne peut plus simplifier

comparaison:

même dénominateur, on compare les numérateurs: $\frac{13}{51} < \frac{34}{51}$ ou $\frac{34}{51} > \frac{13}{51}$

même numérateur, ordre inverse des dénominateurs: $\frac{71}{23} < \frac{71}{70}$ ou $\frac{71}{70} < \frac{71}{23}$

addition:

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$

soustraction

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ $\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7-3}{5} = \frac{4}{5}$

(Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les réduire au même dénominateur).

fraction d'un nombre: $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$ Les deux tiers des 24 élèves: $\frac{2}{3} \times 24 = \frac{2 \times 24}{3} = \frac{48}{3} = 16$

multiplication:

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$

Réduire au même dénominateur:

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ On cherche un nombre multiple de b et d

$\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$ 12 = 4×3 et 6×2 $\frac{3}{4} = \frac{3x3}{4x3} = \frac{9}{12}$ et $\frac{5}{6} = \frac{5x2}{6x2} = \frac{10}{12}$

Somme de nombres en écriture fractionnaire:

même dénominateur:

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4}$

dénominateurs différents: on réduit d'abord au même dénominateur:

$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$

Inverse d'un nombre relatif ≠ 0:

L'inverse de a, c'est $\frac{1}{a}$ car a × $\frac{1}{a}$ = 1

l'inverse de -7 est $\frac{1}{-7}$ car $-7 \times \frac{1}{-7} = \frac{-7 x 1}{-7} = \frac{-7}{7} = 1$

L'inverse de $\frac{a}{b}$, c'est $\frac{b}{a}$ car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

l'inverse de $\frac{2}{3}$, c'est $\frac{3}{2}$ car $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 x 3}{3 x 2} = \frac{6}{6} = 1$

Quotient de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$\frac{4}{7} : \frac{3}{4} = \frac{4}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{4 x 4}{7 x 3} = \frac{16}{21}$

Calculer un quotient en simplifiant:

$\frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{5 x 4}{6 x 7} = \frac{5 x 2 x 2}{2 x 3 x 7} = \frac{5 x 2 x 2}{2 x 3 x 7} = \frac{10}{21}$

Fractions irréductibles:

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

$\frac{3}{4}$ est irréductible car PGCD (3 ; 4) = 1

Simplifier: $\frac{60}{45} = \frac{\cancel{5 x 3} x 4}{\cancel{5 x 3} x 3} = \frac{4}{3}$ PGCD (4 ; 3) = 1 donc $\frac{4}{3}$ est irréductible.

Puissance d'un nombre relatif:

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times .... \times a}_{\text{n fois}}$ se lit "a puissance n" ou "a exposant n"

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

Notations:

$a \times a = a^2$ " a au carré " $3 \times 3 = 3^2 = 9$

$a \times a \times a = a^3$ " a au cube " $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$

L'inverse de a c'est a^{-1} $a \times a^{-1} = a \times \frac{1}{a} = 1$ 3 et 3^{-1} $3 \times \frac{1}{3} = 1$

L'inverse de a^n c'est $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^n \times a^{-n} = a^n \times \frac{1}{a^n} = 1$

$3^2 \times 3^{-2} = 3^2 \times \frac{1}{3^2} = 9 \times \frac{1}{9} = 1$

$a^1 = a$ $3^1 = 3$

$a^0 = 1$ $3^0 = 1$

$a^n \times a^m = a^{n+m}$

3^2	×	3^3	=	3^{2+3}
3×3	×	3×3×3	=	3^5
3×3	×	3×3×3	=	3×3×3×3×3
9	×	27	=	243
	243		=	243

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 3×3×3 = 27$

$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3x3x3x3x3}{3x3} = 3×3×3 = 3^3 = 3^{5-2} = 27$

Puissances de 10:

$10^n = \underbrace{10×10×10× ..... ×10}_{\text{n fois}} = \underbrace{1000....0}_{\text{n chiffres 0}}$ $10^5 = 100\ 000$

L'inverse de 10^n c'est 10^{-n} et $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}0000...1$ $\frac{1}{10^5} = 0{,}00001$

n décimales

$10^1 = 10$ $\quad 10^0 = 1$

$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ $\quad 10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$

$10^{-6} \times 10^4 = 10^{-6+4} = 10^{-2}$

$\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ $\quad \dfrac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

$\dfrac{10^{-5}}{10^8} = 10^{-5-8} = 10^{-13}$

$(10^m)^n = 10^{m \times n}$ $\quad (10^5)^2 = 10^{5\times 2} = 10^{10}$

$(10^3)^{-4} = 10^{3\times(-4)} = 10^{-12}$

Racine carrée d'un nombre positif:

a nombre positif, la racine carrée de a est le nombre ≥ 0 dont le carré est a. On note $\sqrt{a}$

$a \geq 0 \quad (\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$ et $4 \geq 0$ $\qquad \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ car $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ et $\dfrac{3}{2} \geq 0$

Équations de la forme $x^2 = a$

$a \geq 0$ Si $a > 0$ $\quad x^2 = a$ l'équation a deux solutions: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

$x^2 = 5$ l'équation a deux solutions: $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$

Si $a = 0$ $\quad x^2 = 0$ l'équation a une seule solution: 0

Attention: le carré d'un nombre est toujours positif: $x^2 = -16$ est impossible.

Opérations

Multiplication:

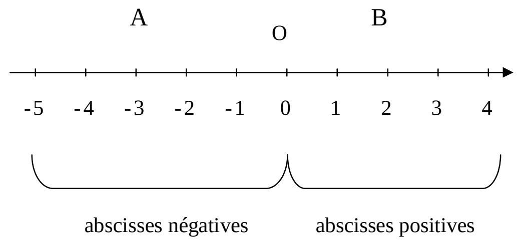
$a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$ $\qquad \sqrt{9} \times \sqrt{4} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36}$ car $3 \times 2 = 6$

Division:

$a \geq 0$ et $b > 0$ alors $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

Nombres relatifs:

Un nombre relatif est un nombre positif (+ 6) ou négatif (- 6).



Distance à zéro: du nombre + 2 est la longueur du segment [OB], c'est-à-dire 2
du nombre - 3 est la longueur du segment [OA], c'est-à-dire 3

Nombres relatifs opposés: même distance à 0 et signes contraires + 4 et - 4

Comparaison:

de deux nombres positifs: le plus petit a la plus petite distance à 0
$2 < 3$

de deux nombres de signes opposés: le plus petit est toujours le nombre négatif
$-2 < 3$

de deux nombres négatifs: le plus petit a la plus grande distance à 0
$-3 < -2$

Opérations sur les nombres relatifs.

Addition:
a, b, c et d distances à 0

+	**+ a** *+ 5*	**- b** *- 7*
+ c *+ 6*	**+ (a+c)** *+ (5+6) = +11*	**+ (c–b) si c>b** **- (b-c) si b>c** *- (7-6) = -1*
- d *- 3*	**+ (a-d) si a>d** *+ (5-3) = +2* **- (d-a) si d>a**	**- (b+d)** *-(7+3) = - 10*

Soustraction:
a, b, c et d distances à 0

-	**+ c** *+ 6*	**- d** *- 3*
+ a *+ 5*	**- (c-a) si c>a** *- (6 – 5) = -1* **+ (a-c) si a>c**	**+ (a+d)** *+ (5+3) = +8*
- b *- 7*	**- (b+c)** *- (7 + 6) = - 13*	**- (b-d) si b>d** *- (7-3) = -4* **+ (d-b) si b>d**

Pour calculer une expression:

on regroupe les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux	-12,5 + 3 – 14 – 0,5 + 15
	3 + 15 – 12,5 – 14 – 0,5
on ajoute les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux	18 – 27
on calcule la somme des deux termes restants	– 9

Pour supprimer des parenthèses:

a + (+ b) = a + b
3 + (+ 5) = 3 + 5 = 8

a – (+ b) = a – b
3 - (+5) = 3 – 5 = - 2

a + (- b) = a – b
3 + (- 5) = 3 - 5 = - 2

a - (- b) = a + b
3 - (-5) = 3 + 5 = -+8

	+	-
+	+	-
-	-	+

Produit de nombres relatifs:

Multiplication ou division

Règle des signes (astuce mnémotechnique)

×	+ ***ami*** +4	– *ennemi* –3
+ ***ami*** +4	+ Les ***amis*** de mes ***amis*** sont mes ***amis***. (+4)×(+4) = +16	– Les ***amis*** de mes *ennemis* sont mes *ennemis*. (+4)×(–3) = –12
– *ennemi* –3	– Les ennemis de mes ***amis*** sont mes *ennemis*. (–3)×(+4) = –12	+ Les ennemis de mes ennemis sont mes amis. (–3)×(–3) = +9

Produits de plusieurs nombres relatifs:

Appliquer la règle des signes par deux nombres à la fois:

$(-4) \times (+5) \times (-2) \times (-3) =$

$(-20) \quad \times \quad (+6) \quad =$

-120

(*Astuce*: - compter le nombre de bâtons des signes: - + - - soit 5 bâtons.
- redessiner les signes sans dépasser le nombre de bâtons: + + -
- le signe de l'opération est le dernier signe dessiné, soit –).

Quotient de nombres relatifs: mêmes règles que le produit

$\frac{+24}{-8} = -3 \qquad \frac{+24}{+8} = +3 \qquad \frac{-24}{+8} = -3 \qquad \frac{-24}{-8} = +$

Écriture scientifique d'un nombre relatif:

Sous la forme $a \times 10^n$ avec a nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et n un entier relatif

Si $A = 4\,655{,}76 \times 10^{-7}$ alors $A = 4{,}65576 \times 10^3 \times 10^{-7}$
$= 4{,}65576 \times 10^{3+(-7)} = 4{,}65576 \times 10^{-4}$

Encadrement par des puissances de 10:

$x = a \times 10^n$ avec a en écriture scientifique $10^n < x < 10^{n+1}$
$x = 56{,}34 \times 10^4 \quad x = 5{,}634 \times 10^5 \qquad 10^5 < 5{,}634 \times 10^5 < 10^6$

Ordre de grandeur:

$x = a \times 10^n$ ordre de grandeur c'est $b \times 10^n$, avec b arrondi à l'unité de a
$x = 56{,}34 \times 10^4 \qquad x = 5{,}634 \times 10^5$ ordre de grandeur: 6×10^5

Égalités et opérations:

Si a = x alors a – x = 0	Si 3 = x alors 3 – x = 3 – 3 = 0
Si a – x = 0 alors a = x	Si 4 – x = 0 alors x = 4
Si a = x, alors a + c = x + c	Si 3 = x alors 3 + 5 = x + 5
Si a = x, alors a – c = x – c	Si 4 = x alors 4 – 7 = x – 7
Si a = x, alors a×k = x×k	Si 3 = x alors 3×5 = x×5 ou 15 = 5x
Si a = x, alors a:k = x:k	Si 4 = x alors 4:9 = x:9 ou $\frac{4}{9} = \frac{x}{9}$

Résoudre une équation:

a + x = b	alors a – a + x = b – a	alors x = b – a
8 + x = –6	alors 8 – 8 + x = –6 – 8	alors x = –14
kx = a	alors $\frac{kx}{k} = \frac{a}{k}$	alors $x = \frac{a}{k}$
3x = – 12	alors $\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3}$	alors x = – 4

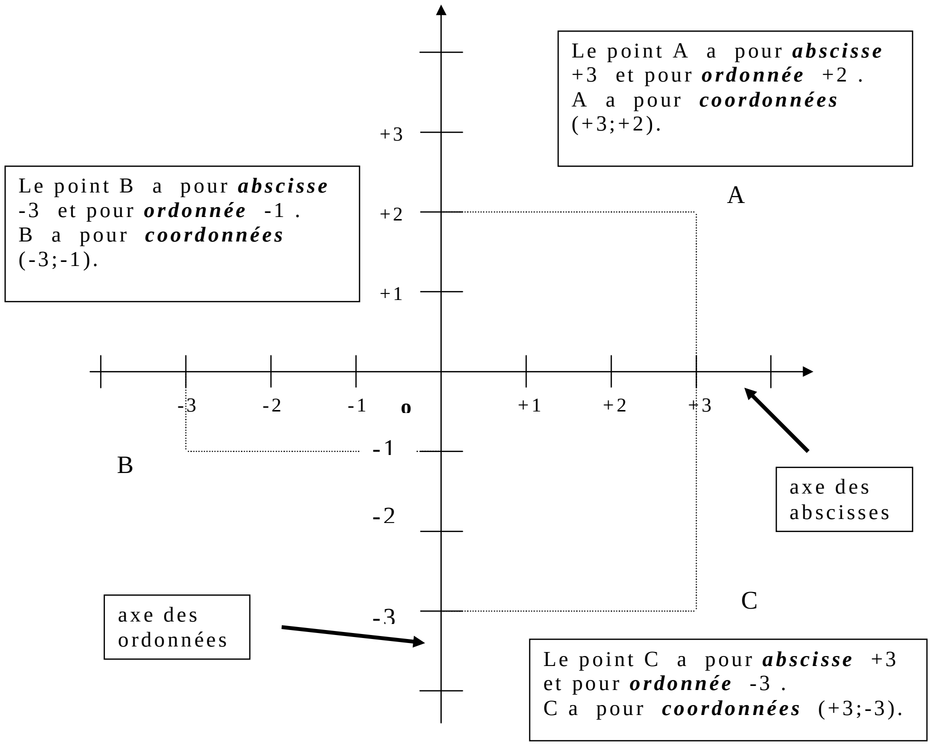
Produits en croix

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors ad = bc $\qquad \frac{a}{b} \; \frac{c}{d} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ alors $2\times6 = 3\times4 = 12$

Exemple: $\frac{x}{4} = \frac{5}{9}$ alors $9x = 4\times5 = 20$ alors $x = \frac{20}{9}$

$\frac{4}{x} = \frac{6}{5}$ alors $6x = 4\times5 = 20$ alors $x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

Repérage dans le plan:



Expressions littérales (des nombres sont désignés par des lettres):

- Développer

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ $\qquad$ $5 \times (x + 2) = 5 \times x + 5 \times 2 = 5x + 10$

$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$ $\qquad$ $6 \times (y - 3) = 6 \times y - 6 \times 3 = 6y - 18$

- Factoriser

$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$ $\qquad$ $5x + 10 = 5 \times x + 5 \times 2 = 5 \times (x + 2)$

$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$ $\qquad$ $6y - 18 = 6 \times y - 6 \times 3 = 6 \times (y - 3)$

Notations:

$a \times x = a x$ $\qquad$ $2 \times x = 2 x$

$b \times (x + c) = b (x + c)$ $\qquad$ $4 \times (x + 2) = 4 (x + 2)$

Égalité:

Une égalité est constituée de deux nombres séparées par le signe =

$$3 x + 2 x = 5 x$$

Écriture littérale:

$a\times x = ax$ $\qquad$ $a\times(x+b) = a(x+b)$ $\qquad$ $-1\times x = -x$ $\qquad$ $-1\times(x+b) = -(x+b)$

$3\times x = 3x$ $\qquad$ $3\times(x+2) = 3(x+2)$ $\qquad$ $-1\times 4 = -4$ $\qquad$ $-1\times(x+3) = -(x+3)$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ $\qquad$ $(4+5)(2+3) = 4\times 2 + 4\times 3 + 5\times 2 + 5\times 3$

$$9 \times 5 = 8 + 12 + 10 + 15$$

$$45 = 45$$

autres exemples: $(2x+3)(x+4)$
$= 2x\times x + 2x\times 4 + 3\times x + 3\times 4$
$= 2x^2 + 8x + 3x + 12$
$= 2x^2 + 11x + 12$

$(3x-4)(-x+2)$
$= 3x\times(-x) + 3x\times 2 -4(-x) - 4\times 2$
$= -3x^2 + 6x + 4x - 8$
$= -3x^2 + 10x - 8$

Développement:

Développer un produit, c'est l'écrire sous forme d'une somme (ou d'une différence):

$k (a + b) = k a + k b$ $\qquad$ $k (a - b) = k a - k b$ $\qquad$ $(a + b) (c + d) = ac + ad + bc + bd$

$5 (x + 2) = 5x + 10$ $\qquad$ $5 (x - 2) = 5x - 10$ $\qquad$ $(x + 3) (x +5) = x^2 + 5x + 3x + 15$
$= x^2 + 8x + 15$

Identités remarquables:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ $\qquad$ $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ $\qquad$ $(x + 3) (x - 3) = x^2 - 9$

Factorisation:

Factoriser une somme (ou une différence), c'est l'écrire sous forme d'un produit.

$k a + k b = k (a + b)$ $\qquad$ $(x + 2) (3x - 1) + 3 (x + 2) = (x + 2) (3x - 1 + 3) = (x + 2) (3x + 2)$

$k a - k b = k (a - b)$ $\qquad$ $(x + 2) (3x - 1) - 3 (x + 2) = (x + 2) (3x - 1 - 3) = (x + 2) (3x - 4)$

Identités remarquables:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $\qquad$ $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x + 3)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + (-3)^2 = (x - 3)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$ $\qquad$ $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3) (x + 3)$

Équation du premier degré à une inconnue:

Résoudre une équation du premier degré à une inconnue c'est résoudre l'équation sous la forme
$a x = b$

$3x + 2 = x - 1 \qquad 3x - x + 2 - 2 = x - x - 1 - 2 \qquad 2x = -3 \qquad x = -\frac{3}{2}$

Equation de la forme (ax + b) (cx + d) = 0

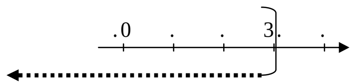
L'un au moins des facteurs du produit est nul. les solutions sont tels que ax + b = 0 et cx + d = 0

$(3x + 5)(x - 8) = 0 \qquad 3x + 5 = 0$ donc $x = -\frac{5}{3}$ et $x - 8 = 0$ donc $x = 8$

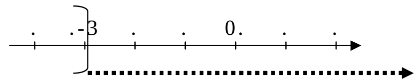
Inéquation du premier degré à une inconnue:

C'est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu.
Résoudre l'inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'inégalité soit vraie.

$2x \leq 6$ alors $x \leq 3$



$-x + 1 < 4$ alors $-x < 3$ alors $x > -3$



Système de deux équations à deux inconnues:

Il est de la forme: $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ où x et y sont les deux inconnues

Résoudre un système: on se ramène à la résolution d'équations à une inconnue.

Exemple: $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ $\quad y = 2 - 3x \quad 2x - 3(2 - 3x) = 5$

$2x - 6 + 9x = 5$
$11x = 11 \quad x = 1$

$y = 2 - 3\times1 = 2 - 3 = -1$

$x = 1$ et $y = -1$

Diviseurs communs à deux entiers:

Un diviseur commun à a et b est un nombre entier qui divise a et qui divise b.

2 est un diviseur commun à 8 et 12 car 8 : 2 = 4 et 12 : 2 = 6

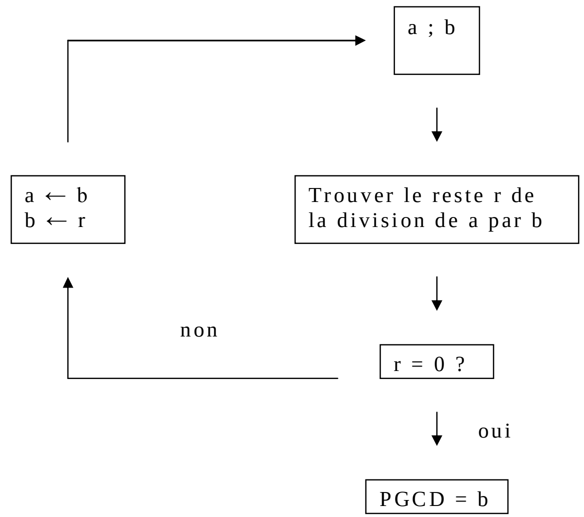
Remarque: 1 est toujours diviseur commun à a et b.

PGCD Plus Grand Commun Diviseur. On peut le noter PGCD (a ; b)

diviseurs de 8: 1, 2, 4 et 8 diviseurs de 12: 1, 2, 3, 4, 6 et 12
diviseurs communs à 8 et 12: 1, 2 et 4 PGCD (8 ; 12) = 4

Si PGCD (a ; b) = 1, alors a et b sont premiers entre eux.
2 et 3 sont premiers entre eux car PGCD (2 ; 3) = 1
8 et 12 ne sont pas premiers entre eux car PGCD (8 ; 12) = 4 ≠ 1

Algorithme d'Euclide et recherche du PGCD:
r est le reste de la division euclidienne de a par b (avec b < a), alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)



exemple: PGCD (1078 ; 322) ?

a	b	restes	étapes
1078	322	112	1078 = 3 × 322 + 112
322	112	98	322 = 2 × 112 + 98
112	98	14	112 = 1 × 98 + 14
98	14	0	98 = 7 × 14 + 0

PGCD (1078 ; 322) = PGCD (322 ; 112) = PGCD (112 ; 98) = PGCD (98 ; 14) = **14**

Inégalités:

$a < b$ c'est $a - b < 0$ $\quad$ $5 < 6{,}7$ $\quad$ c'est $5 - 6{,}7 < 0$ $\quad$ $-1{,}7 < 0$

$a > b$ c'est $a - b > 0$ $\quad$ $8 > 3$ $\quad$ c'est $8 - 3 > 0$ $\quad$ $5 > 0$

Comparer deux fractions:

On réduit au même dénominateur et on compare les numérateurs.

$\frac{7}{8}$ et $\frac{6}{7}$ on compare $\frac{49}{56}$ et $\frac{48}{56}$ $\quad$ $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$

Encadrement:

soit x un nombre: $\quad$ $a \leq x < b$ est un encadrement

$5 \leq 6{,}5 < 7$

Ordre:

si $a < b$ alors $a + c < b + c$ $\quad$ $3 < 5$ alors $3+4 < 5+4$ $\quad$ $(7<9)$

si $a < b$ alors $a - c < b - c$ $\quad$ $3 < 5$ alors $3-4 < 5-4$ $\quad$ $(-1<1)$

si $a < b$ et $k>0$ alors $ka < kb$

$3 < 5$ alors $4\times3 < 4\times5$ $\quad$ $(12<20)$

$-10 < -6$ alors $4\times(-10) < 4\times(-6)$ $\quad$ $(-40 > -24)$

si $a < b$ et $k<0$ alors $ka > kb$

$3 < 5$ alors $-4\times3 > -4\times5$ $\quad$ $(-12 > -20)$

$-10 < -6$ alors $-4\times(-10) > -4\times(-6)$ $\quad$ $(40 > 24)$

Proportionnalité et tableaux:

Proportionnalité et tableaux:

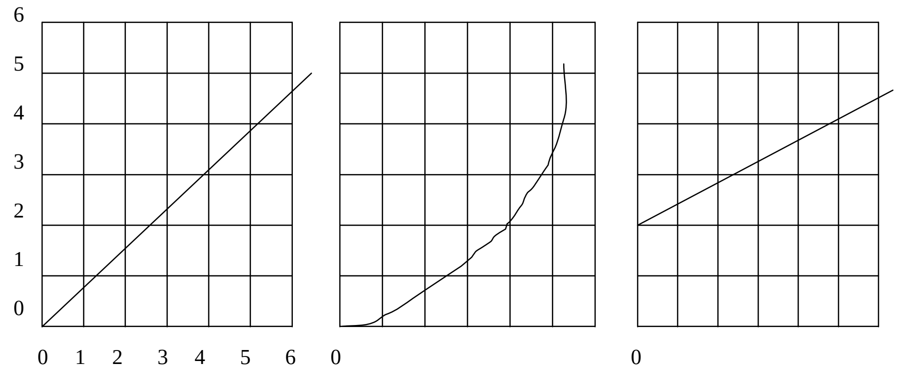
Dans un tableau, il y a situation de proportionnalité quand on passe de la $1^{ère}$ ligne à la $2^{ème}$ ligne en multipliant toujours par le même nombre (coefficient de proportionnalité).

× 4

3	7	8
12	28	32

Proportionnalité et graphiques:

Dans un repère de plan: il y a proportionnalité si les points sont alignés avec l'origine du repère et inversement.



OUI $\quad$ NON $\quad$ NON

Pourcentage:

Proportion d'une quantité par rapport à une autre quantité, évalué sur 100.

L'élève a 65% de réussites en français. Sur 100 exercices, il en a réussi 65.

Indice:

Nombre exprimant un rapport entre deux grandeurs (ex indice des prix).

Dire que l'indice en 2008, de base 100 en 1998, du prix d'un scooter est de 123 veut dire que si un scooter coûtait 100 € en 1998, alors il coûte 123 € en 2008.

Prix en 1998 (en euros €)	100	1260
Prix en 2008 (en euros €)	123	1549,80

$\frac{123}{100} = \frac{p}{1260}$ donc $p = \frac{123 \times 1260}{100} = 1549{,}80$

Vitesse moyenne:

$v = \frac{d}{t}$ $\quad$ vitesse moyenne $= \frac{\textit{distance parcourue } d}{\textit{durée } t \textit{ nécessaire pour parcourir la distance}}$

$v = \frac{90\ km}{1\ h}$ se note $v = 90$ km/h ou 90 km.h^{-1}

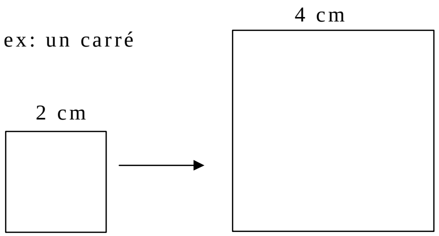
$v = \frac{8\ m}{1\ s}$ se note $v = 8$ m/s ou 8 m.s^{-1}

Propriété: $d = v \times t$ la distance parcourue est égale au produit de la vitesse moyenne par la durée nécessaire pour parcourir cette distance.

Agrandissement:

Un objet est un agrandissement d'un autre objet quand leurs longueurs sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est un coefficient d'agrandissement. Il est strictement supérieur à 1. Coef > 1

ex: un carré



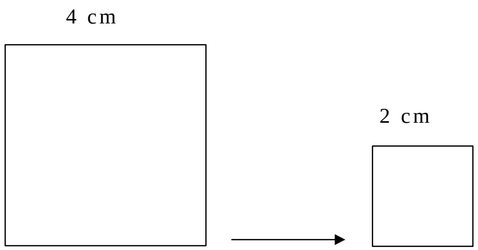
4 cm = 2 × 2 cm

coeff = 2 et 2 > 1

agrandissement

Réduction:

Un objet est une réduction d'un autre objet quand leurs longueurs sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est un coefficient de réduction. Il est strictement inférieur à 1. Coef < 1



2 cm = $\frac{1}{2}$ × 4 cm

= 0,5 × 4

coeff = $\frac{1}{2}$

coeff < 1

réduction

Fonctions linéaires:

Proportionnalité et relation y = a x

Si les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x, alors il existe un nombre "fixe" a tel que y = ax
S'il existe un nombre "fixe" a tel que y = ax, alors les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x.

y = 4x 4 est un nombre "fixe"

x	0,4	3	10,5	20
y	1,6	12	42	80

× 4

Fonctions linéaires

Fonction linéaire de coefficient a:

a nombre "fixe", la fonction linéaire de coefficient a, c'est associer à chaque nombre x son produit ax. On dit que a x est l'image de x.

Fonction linéaire de coefficient a

$$\text{nombre} \xrightarrow{\times a} \text{image}$$

x ax

on note f (x) = ax

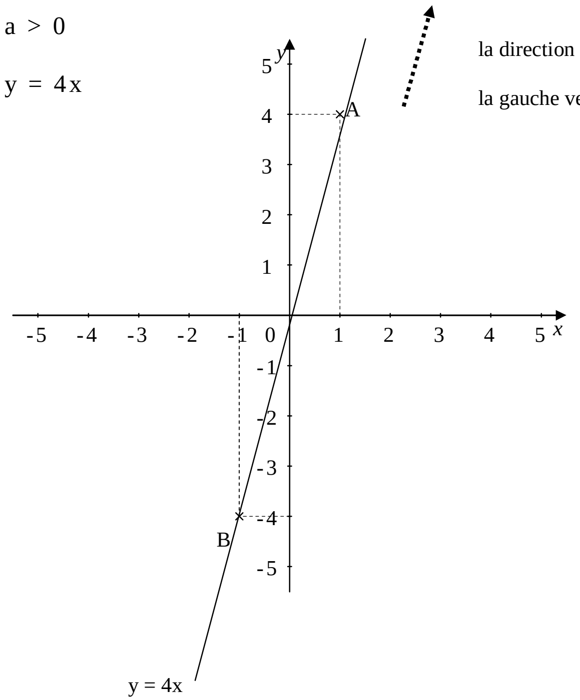
Représentation graphique d'une fonction linéaire:

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est la droite qui passe par l'origine O du repère, et par le point A de coordonnées (1 ; a).

On dit que y = ax est une équation de la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient a. a est appelé le coefficient directeur de cette droite.

a > 0

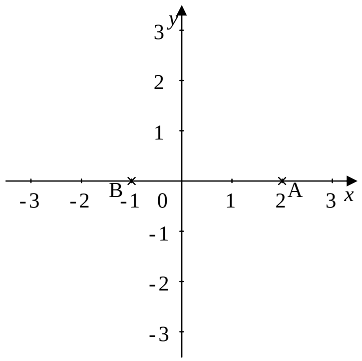
y = 4x



la direction "monte" de

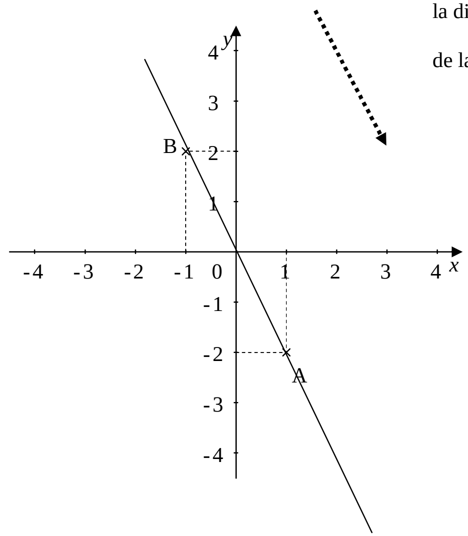
la gauche vers la droite

a = 0
y = 0 x



la droite est l'axe des abscisses

a < 0
y = -2x



la direction "descend"

de la droite vers la gauche

Fonctions affines

a et b nombres "fixes". Une fonction affine associe à chaque nombre x le nombre ax + b
On dit que ax + b est l'image de x.

On dit que x → ax est la fonction linéaire associée à la fonction affine x → ax + b

Fonction affine ax + b

$$x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+b} ax + b$$

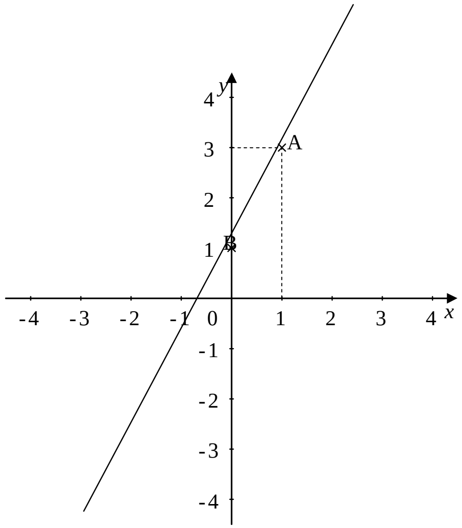
nombre x   image ax + b

on note f(x) = ax + b

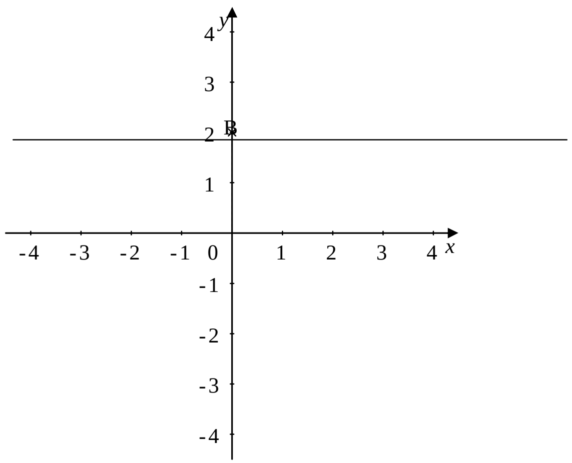
Représentation graphique d'une fonction affine ax + b:

La droite d passe par B (0 ; b) et elle est parallèle à d' de la fonction affine ax

On dit que y = ax + b est une équation de la droite d.
a est le coefficient directeur de la droite d
b est l'ordonnée à l'origine de la droite d.

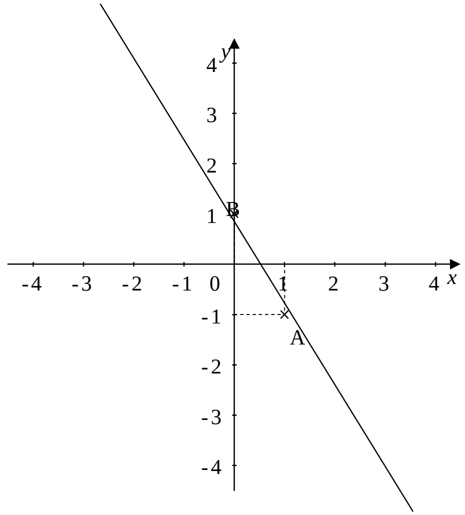


a > 0 avec a = 2
y = 2x + 1



a = 0
y = 2

y = 2



a < 0 avec a = -2
y = -2x + 1

Proportionnalité des accroissements:

Soit une fonction affine ax + b. Quand x varie (augmente ou diminue) d'un certain nombre h, alors son image ax + b varie de ah.

y = 2x + 3 Si x = 1, y = 5
h = 6 alors x = 7 (= 1 **+ 6**), y = 17 (= 5 **+ 12**) 10 = 2×6

proportionnalité

Utilisation de tableaux:

Méthode additive:

+

Nombre de crayons	10	25	35
Prix de vente (en €)	20	50	70

+

Méthode multiplicative:

× 2

Nombre de crayons	10	20	60
Prix de vente (en €)	20	40	120

× 2

► Coefficient de proportionnalité:

Nombre de crayons	10	**1**	5	50
Prix de vente (en €)	20	**2**	10	100

×2

On peut passer d'un nombre de la première ligne au nombre correspondant de la seconde ligne en multipliant toujours par le même nombre × 2.
Ce nombre est le coefficient de proportionnalité.

échelle

$\times \frac{1}{200}$

Longueur sur le plan (en cm)	1	2	3	0,5
Longueur réelle (en cm)	200	400	600	100

×200

Lorsque les longueurs sur un plan sont proportionnelles aux longueurs réelles, on dit que le plan est à l'échelle.

1 cm sur le plan = 200 cm (ou 2 m), le plan est à l'échelle $\frac{1}{200}$

pourcentage

Nombre d'élèves du collège	100	350
Nombre d'élèves en 6ème	24	84

$\times \frac{24}{100}$

Soit p un nombre donné. Pour calculer le p % d'un nombre, on multiplie ce nombre par $\frac{p}{100}$

Pour calculer 24 % de 350, on a $350 \times \frac{24}{100} = 350 \times 0{,}24 = 84$

Statistiques:

Définitions:

- L'effectif d'une valeur est le nombre de fois où la valeur apparaît.
- La fréquence se calcule en divisant l'effectif de cette valeur par l'effectif total.
- Dans un tableau dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant:

→ l'effectif cumulé croissant d'une valeur est la somme de l'effectif de cette valeur et des effectifs des valeurs précédentes.

→ la fréquence cumulée croissante d'une valeur est la somme de la fréquence de cette valeur et des fréquences de toutes les valeurs précédentes.

Dans une classe de 5ème de 25 élèves, les notes sur 20 sont réparties:
15-11-7-14-9-10-9-13-15-6-7-7-11-13-14-10-9-16-15-11-10-14-11-13-9

Note	6	7	9	10	11	13	14	15	16
Effectif	1	3	4	**3**	4	3	3	3	1
Effectif cumulé croissant	1	4	8	11	15	18	21	24	**25**
Fréquence	0,04	0,12	0,16	**0,12**	0,16	0,12	0,12	0,12	0,04
Fréquence cumulée croissante	0,04	0,16	0,32	0,44	0,60	0,72	0,84	0,96	1
Fréquence cumulée croissante en %	4%	16%	32%	44%	60%	72%	84%	96%	100%

3 élèves ont eu la note 10

la fréquence des élèves ayant eu 10 est 0,12 ou 12%

effectif total: 25

Moyenne:

On ajoute toutes les valeurs et on divise par l'effectif total.

J'ai obtenu 6 notes: 12 - 14,5 - 8 - 12,5 - 20 et 6,5 en interro coef 1.

ma moyenne est de: $\frac{12+14,5+8+12,5+20+6,5}{6} = 12,25$

Moyenne pondérée:

On ajoute tous les produits des valeurs par leurs effectifs et on divise par l'effectif total.

Résultats d'une interro dans une classe de 24 élèves:

Note	5	7	10	12	15	16
Effectif	3	5	6	6	2	2

La moyenne M = $\frac{5x3+7x5+10x6+12x6+15x2+16x2}{3+5+6+6+2+2} = \frac{242}{24} = 10,08$